Métodos de Inferencia Estadística con dos poblaciones

Inferencias acerca de dos medias poblacionales

De forma similar al caso de una media poblacional, lo habitual en el trabajo experimental es desconocer las varianzas poblacionales. Desde un punto de vista teórico si las varianzas de las dos poblaciones, es decir σ_1^2 y σ_2^2, fueran conocidas entonces el estadístico con el que se contrastaría cualquier inferencia acerca de las medias poblacionales tiene distribución normal estándar *Z*:

$$Z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

Ahora bien, tal y como ocurre con el caso de una media poblacional, esta situación sólo tiene un interés teórico. En consecuencia, asumiremos que estamos en una situación experimental, y por tanto que las varianzas poblacionales σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas. Si los tamaños muestrales son grandes, es decir $n_1, n_2 > 30$, entonces el estadístico tiene también distribución normal estándar *Z*:

$$Z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

Sin embargo, en el trabajo experimental el método inferencial aplicado a dos medias poblacionales no utiliza ninguno de los dos estadísticos anteriores, empleándose estadísticos con la distribución *t*-student. Asumiremos que los tamaños muestrales son pequeños, y por tanto $n_1, n_2 < 30$. A continuación, se expone el razonamiento estadístico habitual.

En primer lugar, si los tamaños muestrales son pequeños ($n_1, n_2 < 30$) la variabilidad de los datos es muy relevante a la hora de comparar dos medias poblacionales. La varianza mide la variabilidad y esta característica de los datos refleja la homogeneidad de los individuos.

Por ello, se acostumbra a realizar un *F*-test. Esta prueba fue introducida por el estadístico R.A. Fisher y tiene por finalidad comparar dos varianzas poblacionales a través del siguiente estadístico con distribución *F* y n_1-1, n_2-1 grados de libertad:

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} \quad \nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1$$

En el contraste de hipótesis de dos medias poblacionales, el *F*-test es realizado como prueba auxiliar adoptando por lo general el siguiente contraste para las varianzas poblacionales:

$$\text{H0: } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$\text{Ha: } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

De forma similar a otros contrastes de hipótesis si p-valor$>\alpha$ entonces aceptamos H0, rechazándose H0 en caso contrario. El *F*-test que contrasta la igualdad de varianzas poblacionales también se conoce como test de homogeneidad de varianzas.

En segundo lugar, y en función del resultado del contraste para varianzas poblacionales, se utilizará uno u otro estadístico con distribución *t*-student. Si se aceptara la H0 de igualdad de varianzas poblacionales entonces el estadístico con el que se comparan las dos medias poblacionales tiene distribución t-student con n_1+n_2-2 grados de libertad:

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

En el estadístico s_p es al desviación típica común o "pool", valor que se obtiene a partir de la varianza muestral común:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

siendo su valor una estimación puntual de la varianza común σ^2 a las dos poblaciones, ya que bajo la H0:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Por el contrario, si se rechaza la H0 de igualdad de varianzas poblacionales, es decir si:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

entonces el estadístico con el que se comparan las dos medias poblacionales también tiene distribución *t*-student:

$$t_\nu = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

pero sus grados de libertad se estiman a partir de lo que se conoce como expresión de Welch, redondeándose el valor obtenido al entero más próximo:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Desde un punto de vista experimental es la peor situación estadística para contrastar dos medias poblacionales, ya que los muestras son pequeñas y con distinto grado de variabilidad.

Rafael Lahoz-Beltrá, Pilar López González-Nieto, Mariángeles Gómez Flechoso, María Eugenia Arribas, Mocoroa, Alfonso Muñoz Martín, María de la Luz García Lorenzo, Gloria Cabrera Gómez, Jose Antonio Alvarez Gómez, Andrea Caso Fraile, Jefferson Mark Orosco Dagan, Raul Merinero Palomar. Universidad Complutense de Madrid, 2017.